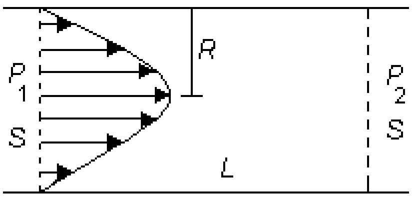
Demostración “Ley de Poiseuille”
Curso 2014-2015. Grado de Farmacia. Física

Demostración “Ley de Poiseuille”: En un fluido viscoso las fuerzas de viscosidad hacen que la velocidad de cada lámina de fluido sea diferente. En concreto, para una conducción cilíndrica horizontal de sección *S* constante por la que circula un fluido newtoniano incompresible en régimen laminar se tiene un diagrama de velocidades como el de la figura:



Si la distancia que separa las dos secciones es *L*, la presión en la sección desde la que se mueve el fluido es P_1, y la presión en la sección hacia la que se mueve el fluido es P_2, la fuerza que produce esa diferencia de presión sobre el fluido contenido en el cilindro tiene de módulo $(P_1 - P_2)\cdot\pi\cdot r^2$ y está dirigida hacia la presión menor. Esta fuerza compensa a la fuerza de viscosidad producida entre la capa externa del cilindro y el resto de fluido, cuyo módulo es, según la expresión vista anteriormente, $2\cdot\pi\cdot r\cdot L\cdot\eta\cdot(\mathrm{d}v/\mathrm{d}r)$, donde d*v* es la variación negativa de velocidad al alejarse d*r* del centro de la conducción, y η es la viscosidad del fluido. Sumando ambas fuerzas e igualando a cero se obtiene

$$\left(P_1 - P_2\right)\cdot\pi\cdot r^2 + 2\cdot\pi\cdot r\cdot L\cdot\eta\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = 0 \Rightarrow -\mathrm{d}v = \frac{P_1 - P_2}{2\cdot\eta\cdot L}\cdot r\cdot\mathrm{d}r$$

Integrando esta expresión desde la capa externa del cilindro, situada a una distancia *r* del centro y en la que la velocidad es *v*(*r*), hasta la pared de la conducción, de radio *R* y en la que la velocidad es cero, se tiene

$$\Delta v = \int_{v(r)}^{0} -\mathrm{d}v = \frac{P_1 - P_2}{2\cdot\eta\cdot L}\cdot\int_r^R r\cdot\mathrm{d}r \Rightarrow v(r) = \frac{P_1 - P_2}{4\cdot\eta\cdot L}\cdot\left(R^2 - r^2\right)$$

El flujo ϕ que circula entre las dos secciones consideradas puede hallarse dividiendo cada sección en anillos infinitesimales concéntricos de anchura d*r*, en cada uno de los cuales la velocidad del fluido en todos sus puntos es la misma *v*(*r*). El flujo dϕ que atraviesa cada anillo:

$$\mathrm{d}\phi = 2\cdot\pi\cdot r\cdot\mathrm{d}r\cdot v(r) = 2\cdot\pi\cdot\frac{P_1 - P_2}{4\cdot\eta\cdot L}\cdot\left(R^2 - r^2\right)\cdot r\cdot\mathrm{d}r$$

El flujo total ϕ se obtiene integrando la expresión anterior sobre toda la superficie *S*:

$$\phi = \int_S \mathrm{d}\phi = \pi\cdot\frac{P_1 - P_2}{2\cdot\eta\cdot L}\cdot\int_0^R\left(R^2 - r^2\right)\cdot r\cdot\mathrm{d}r = \pi\cdot\frac{P_1 - P_2}{2\cdot\eta\cdot L}\cdot\left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right)$$

de forma que el flujo ϕ de este fluido viene dado por $\phi = \frac{P_1 - P_2}{8\cdot\eta\cdot L}\cdot\pi\cdot R^4$

que constituye la <u>Ley de Poiseuille</u>.